**Olympiades de mathématiques 2014**

**EUROPE – AFRIQUE – ASIE**

**EXERCICE NATIONAL 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE**

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d’un carré dont le côté mesure 100 km.

La Direction Départementale de l’Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

**Partie A**

« On pourrait construire des routes allant d’Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l’assistant n°1.

« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d’Alençon à Célançon et l’autre de Délançon à Bélançon » propose l’assistant n°2.

« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l’assistant n°3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| geogebra | geogebra | geogebra |
| *fig. 1*  Assistant n°1 | *fig. 2*  Assistant n°2 | *fig. 3*  Assistant n°3 |

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?
2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

|  |  |
| --- | --- |
| « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :  Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ? | *fig. 4* |

**Partie B**

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

*Rappels de géométrie :*

*Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :*

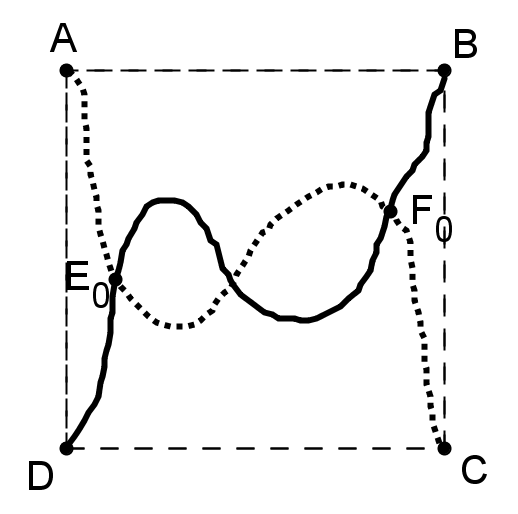
*on a toujours AB + BC ≥ AC ;*

*on a l’égalité AB + BC = AC si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

*On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).*

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d’une part, B et D d’autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de coté, comme dans le dessin suivant.

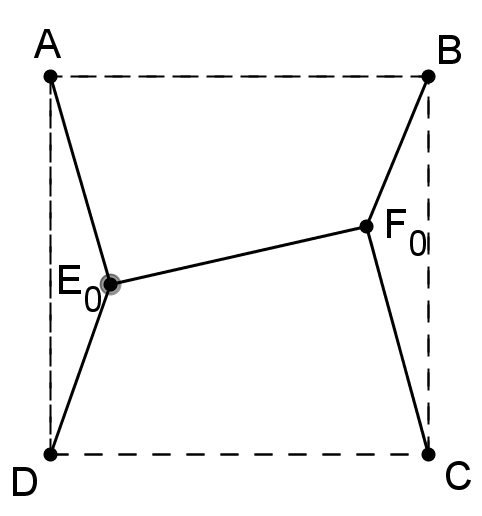


*fig. 5*

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

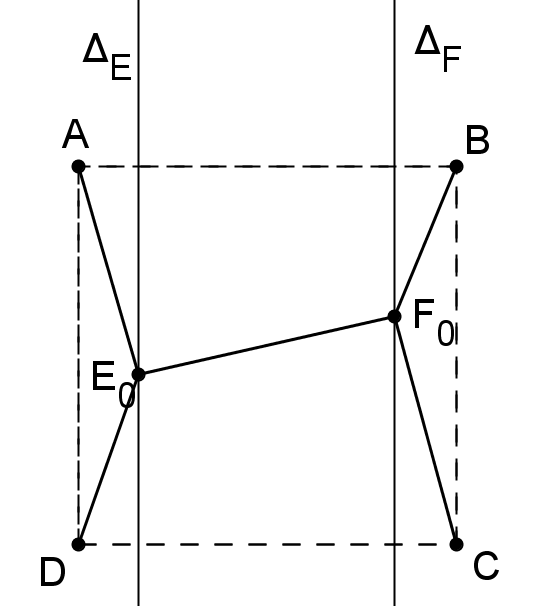
En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d’Alençon, on appelle E0 le premier point d’intersection rencontré et F0 le dernier point d’intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu’alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).



*fig. 6*

1. On considère les droites ΔE et ΔF, parallèles à (AD) passant par E0 et F0 (voir figure 7 ci-dessous).

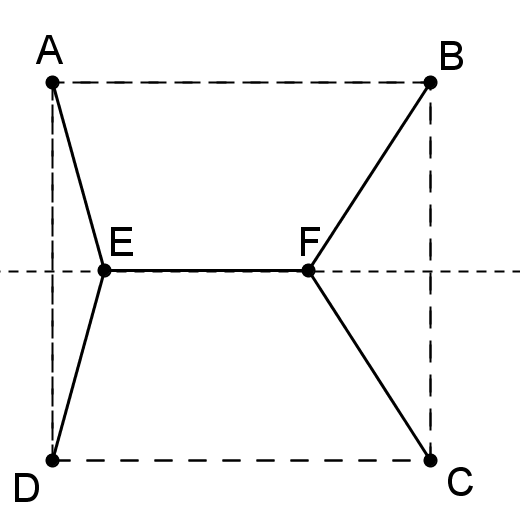


*fig. 7*

* 1. Déterminer le point E de ΔE tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.

On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F0.

* 1. Montrer que EF ≤ E0F0.
  2. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).



*fig. 8*

1. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d’autre de la médiatrice de [AB].
   1. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].
   2. D’après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).

Pouvez-vous l’aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

* 1. Quelle est alors la valeur de l’angle DEA ?